MATEMÁTICAS: 4ºB ESO
Capítulo 5:
Inecuaciones

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

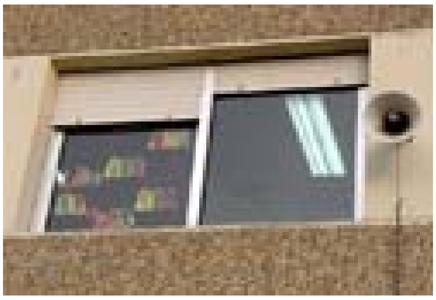
Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En muchas ocasiones vas a encontrarte con inecuaciones. Si trabajas con intervalos dirás $a < x < b$, por ejemplo. En otras ocasiones tu problema será que algo debe ser menor que una cierta cantidad. Imagina que queremos construir una ventana en la pared de una habitación de 4 metros de larga y 2,3 metros de alta. Es imposible que la ventana tenga unas dimensiones mayores que las de la pared. Para complicarlo un poco, imagina ahora que la longitud total de los perfiles con los que vamos a construir la ventana es de 10 metros. Si la ventana es rectangular y llamamos x a la longitud de la base e y a la de la altura, por ahora sabemos que $x \leq 4$, $y \leq 2,3$, $2x + 2y \leq 10$. Por ahora hay muchas soluciones que resuelven el problema. Pero el arquitecto desea que la ventana tenga la mayor luz posible. Tú ya sabes que el área máxima la consigues con un cuadrado, pero… esta solución no te sirve porque el lado debería medir 2,5 metros y nos saldríamos de la pared. Debemos jugar con esas desigualdades para dar una solución al problema.



Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTERVALOS

Recuerda que:

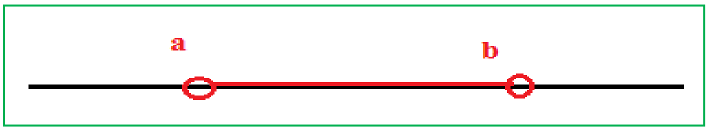
Un intervalo de números reales es el conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

1.1. Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras I = $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

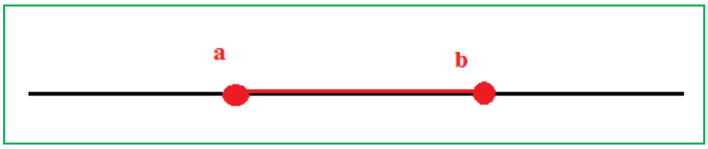
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras I = $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:

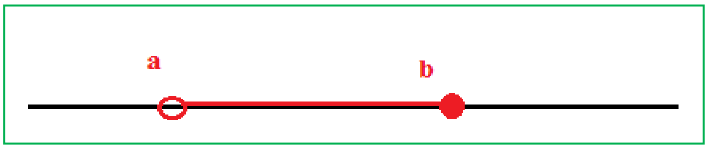


Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de éstos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras:

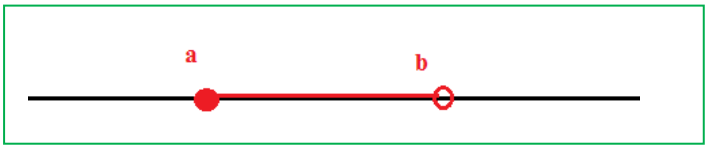
I = $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\}$,

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras I = $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



1.2. Semirrectas reales

Semirrecta de los números positivos S = $(0, \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos S = $(-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re = (-\infty, \infty)$.

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) $(-\infty, 6)$

2. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \geq 7$

2. INECUACIONES

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- $-2 < 5$, $4 \geq x + 2$, $x^2 - 5 \geq x$, $x + y \geq 2$.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

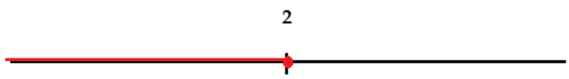
Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$



2.1. Inecuaciones equivalentes:

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$ 

Actividades propuestas

3. Dada la siguiente inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$$

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
b) Restar 5: $x - 3 > 7$
c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
d) Multiplicar por –5: $-3x \geq 7$
e) Dividir entre 2: $4x < 10$
f) Dividir entre –2: $4x \geq 10$

5. Escribe una inecuación que sea cierta para $x = 3$ y falsa para $x = 3,5$.

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

3.1. Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \ \text{ ó } \ ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con *x* a un miembro y los números al otro.

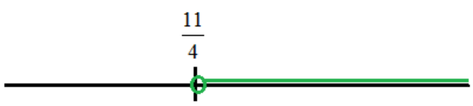
4º) **Reducir** términos semejantes.

5º) **Despejar** la *x*.

Ejemplo:

- $$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-7)}{6} > \frac{3(4-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7) > 3(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7 > 12-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x > 6-7+12 \Leftrightarrow 4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$$ 

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

6. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$

7. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$

8. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$

9. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty]$ d) $(-\infty, 6)$

10. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$

3.2. Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

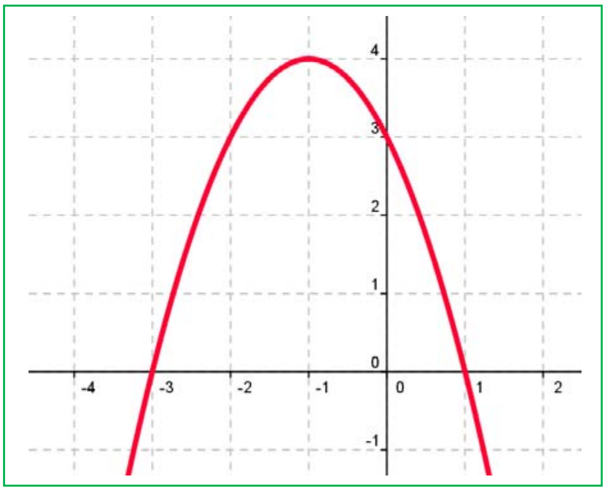
empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- Representa gráficamente la parábola $y = x^2 + 4x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 + 4x + 6 > 0$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad ≥, $x^2 + 4x + 6 \geq 0$ la solución sería:

$$x \in [-3, 1\}.$$

Si fuera $x^2 + 4x + 6 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $x^2 + 4x + 6 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

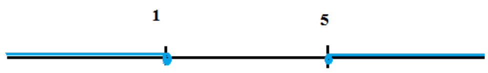
Ejemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ sus raíces son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Actividades propuestas

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$

e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$

d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 5x \geq 0$
b) $3x^2 - 27 > 0$
c) $x^2 \leq 0$
d) $2x^2 > 4x$
e) $2x^2 - 8 > 0$
f) $5x^2 + 5x \geq 0$
g) $5x^2 - 5 \leq 0$
h) $x^2 - x > 0$

14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$
c) $x^2 + 9x + 14 > 0$
d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$
f) $x^2 + 8x + 16 > 0$
g) $x^2 + x + 3 \geq 0$
h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

15. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $x^2 + x - 6 > 0$
b) $x^2 - x - 12 \leq 0$
c) $x^2 - x - 20 < 0$
d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$
g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$
h) $2x^2 + x - 15 < 0$

16. Calcula los valores de *x* para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}$

3.3. Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es aquel en el que la única variable que interviene en todas las ecuaciones está elevada a un exponente igual a la unidad.

Sistemas de dos ecuaciones, tienen por expresión general:

$$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$$, con cualesquiera de los signos <, >, $\leq$ ó $\geq$.

Para resolverlos, independientemente del número de inecuaciones que compongan el sistema, se resuelve cada inecuación por separado, y al final se determina la solución como la intersección de todas ellas, es decir, el intervalo que verifican todas las inecuaciones.

Ejemplo:

$\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, los intervalos solución son $\begin{cases} (2, +\infty) \\ (-\infty, 5] \end{cases} \Rightarrow (2, +\infty) \cap (-\infty, 5] = (2, 5]$

Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es decir, en $(2,5]$.

Gráficamente puede verse:

Actividades propuestas

18. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6 \le 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 1 \ge x + 9 \\ x + 5 \le 2 - 3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 \le 3x + 7 \\ \dfrac{2x}{5} - \dfrac{x}{4} \ge \dfrac{2}{3} \end{cases}$

19. Indica un número positivo que al sumarle 5 sea menor que 7.

20. Expresa mediante una inecuación el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es mayor que el de un rectángulo de lados 3 y 7 cm.

21. Determina las posibles edades de Pepita y de su hija Charo sabiendo que difieren en más de 20 años y que dentro de 2 años, la cuarta parte de la edad de la madre es menor que la edad de la hija.

3.4. Inecuaciones en valor absoluto

Una inecuación en valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La expresión general es de la forma $|ax + b| \le c$, empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, aplicamos la definición de valor absoluto de una cantidad y pasamos a un sistema de dos ecuaciones cuya solución es la solución de la inecuación.

$$|ax + b| \le c \text{ por definición } \begin{cases} ax + b \le c \\ -ax - b \le c \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|2x - 4| \le 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \le 12 \\ -2x + 4 \le 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 8] \\ [-4, +\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4, 8] \Rightarrow$$

$$|2x - 6| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 > 10 \\ -2x + 6 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}.$$

No existe ningún x que a la vez sea menor que –2 y mayor que 8, pero la solución son los valores que o bien pertenecen a un intervalo o bien al otro: $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$.

Comprueba que, por ejemplo, $x = 10$ verifica que $2x - 6 = 20 - 6 = 14 > 10$, y que $x = -3$, también ya que $2x - 6 = -6 - 6 = -12$ cuyo valor absoluto es mayor que 10.

Actividades propuestas

22. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x + 3| < 2$ b) $|2x + 5| > 1$ c) $|x - 6| \le 2$ d) $|x - 2| \ge 2$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

4.1. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Es toda inecuación del tipo: $ax + by > c$, con cualesquiera de los signos <, >, $\leq$ o $\geq$. Para resolverlas:

1º) **Representamos gráficamente** la función lineal asociada $ax + by = c$.

2º) La recta divide al plano en **dos semiplanos**. Utilizando un punto obtenemos cual es el semiplano solución.

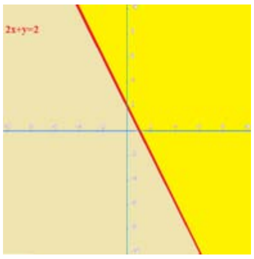
3º) La **inclusión o no** en dicha solución de la frontera, depende de si la desigualdad es estricta o no, respectivamente.

Ejemplo:

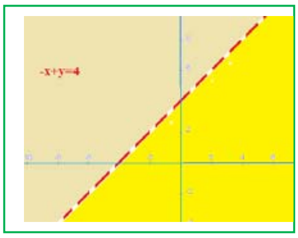
- $2x + y \geq 2$.

Se dibuja la recta $2x + y = 2$. El punto (0, 0) no verifica la desigualdad, luego el semiplano solución es el otro.

El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, incluyendo la recta que se marca de forma continua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación.



Ejemplo:



- $-x + y < 4$.

Dibujamos la recta $-x + y = 4$. El punto (0, 0) verifica la desigualdad.

El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, excluyendo la recta que se marca de forma discontinua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación y los de la recta no lo hacen.

Actividades propuestas

23. Representa los siguientes semiplanos: a) $x + y < 5$ b) $3x + 2y > 0$ c) $2x + y \leq 7$ d) $x - 3y \geq 5$

4.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Es un conjunto de inecuaciones de primer grado, todas con las mismas dos incógnitas.

El conjunto solución está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones. Al conjunto solución se le llama **región factible**.

Ejemplo:

- $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$. La superficie marcada en amarillo es la solución del sistema, incluyendo las semirrectas roja y gris, ya que ambas desigualdades son no estrictas. Es lo que se denomina *región factible*.

Actividades propuestas

24. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

Autora: Ana Lorente

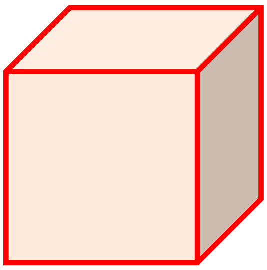
Revisora: María Molero

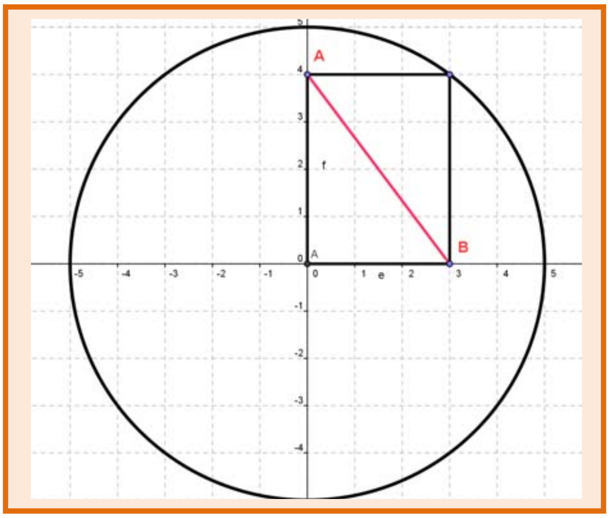
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?





Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Estos chistes son de la Exposición "*Ríete con las mates*" del grupo de innovación educativa *Pensamiento Matemático* de la Universidad Politécnica de Madrid.

Programación lineal

La **programación lineal** se basa en sistemas de inecuaciones y se utiliza en microeconomía, en administración de empresas para minimizar los gastos y maximizar los beneficios, en asignación de recursos, en planificación de campañas de publicidad, para solucionar problemas de transporte…

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de x, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow$

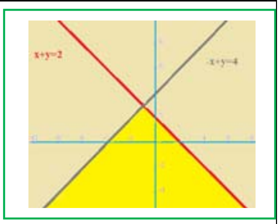
$x \geq 4$.

¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

Observa que hemos dividido la desigualdad por $(x-4)$ que para unos valores de x es positiva y no cambia el sentido de la desigualdad, pero para otros es negativa y sí cambia.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	• Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la desigualdad: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ • Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ • Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	• $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ • $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ • $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ • $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primer grado con una incógnita	$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hay solución	
Inecuación en valor absoluto	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ y $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ y $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$ Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

Autora: Ana Lorente

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) $-11 < x < 11$

c) $-2 < x \leq \frac{1}{3}$

2. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [2, 6)

b) (–7, 1)

c) (0, 9]

3. Dada la siguiente inecuación $5 + 3x > 2x + 1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

i. Sumar 4: $x - 2 > 5$

ii. Restar 6: $x - 4 > 8$

iii. Multiplicar por 6: $5x \geq 10$

iv. Multiplicar por –4: $-2x \geq 8$

v. Dividir entre 2: $6x < 12$

vi. Dividir entre –2: $20x \geq 60$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $2x - 3 \leq -5$

b) $x - 2 \leq 3x - 5$

c) $12 - x \leq -6$

d) $-5x - 3 \leq -2x + 9$

e) $2(3x - 3) > 6$

f) $-3(3 - 2x) < -2(3 + x)$

g) $2(x + 3) + 3(x - 1) \leq 2(x + 2)$

6. Resuelve:

a) $\frac{x}{2} - 6 < 4$

b) $\frac{2x}{3} - 3 \leq -x$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) $2(3x-2) > 3-x$

d) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$

e) $\frac{x-4}{4}+2 > \frac{x+4}{8}$

f) $\frac{x}{2}-4 < x-\frac{x+1}{7}$

7. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $(-\infty,-3]$

b) $[4,+\infty)$

c) $(-\infty,5)$

d) $(-2,+\infty)$

8. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-6}$

b) $\sqrt{-x+5}$

c) $\sqrt{10-5x}$

d) $\sqrt{-6x-30}$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 75 < 0$

b) $-x^2 + 16 \leq 0$

c) $-x^2 + 25 \geq 0$

d) $5x^2 - 80 \geq 0$

e) $4x^2 - 1 > 0$

f) $25x^2 - 4 < 0$

g) $9x^2 - 16 < 0$

h) $36x^2 + 16 \leq 0$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-4x^2 + 5x \leq 0$

b) $3x^2 + 7x \geq 0$

c) $2x^2 < 8x$

d) $-3x^2 - 6x \geq 0$

e) $-x^2 + 3x < 0$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

f) $-5x^2 - 10x \geq 0$

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado :

a) $3x^2 \leq 0$

b) $8x^2 > 0$

c) $-5x^2 < 0$

d) $9x^2 \geq 0$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \leq 0$

b) $-x^2 - 4x \leq 0$

c) $x^2 + 1 \geq 0$

d) $-3x^2 > 30$

e) $-x^2 - 4 \leq 0$

f) $-3x^2 - 12x \geq 0$

g) $-5x^2 < 0$

h) $x^2 + 9 \geq 0$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x > 0$

b) $3x^2 - 3 \leq 0$

c) $5x^2 - 20 \geq 0$

d) $x^2 + 4x > 0$

e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x+1)$

14. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$

b) $\sqrt{x^2+2x+1}$

c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$

e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$

f) $\sqrt{x^2+6x-27}$

g) $\sqrt{1-4x^2}$

Autora: Ana Lorente

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(x-1)^2 > 2$

b) $3(x+1)^2 \leq -12$

c) $-x^2 < 2$

d) $4(x-2)^2 > 1$

e) $-5(x+4)^2 \leq 0$

f) $9(x+1)^2 \leq 81$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x(2x-3) - 3(5-x) > 83$

b) $(2x+5)(2x-5) \leq 11$

c) $(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130$

d) $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \geq 40$

e) $(3x-4)(4x-3) - (2x-7)(3x-2) < 214$

f) $8(2-x)^2 > 2(8-x)^2$

g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5$

h) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2}$

17. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1\leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3>x-2 \\ 3x-7<x-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \\ \frac{x}{2}-\frac{4x}{9}<5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2}\leq x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3}\geq x \end{cases}$

18. Resuelve las siguientes inecuaciones:

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $|2x+1| \le 5$ b) $|-x+1| \ge 2$ c) $|-x+9| \le 10$ d) $|2x-1| > 4$

e) $|-4x+12| < -6$ f) $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \le 10$ g) $|-4x+8| < 3$

19. Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 - 5x + 6 > 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 < 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 \ge 0$, y dónde $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

20. Representa los siguientes semiplanos:

a) $x < 0$ b) $y \ge 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \le 1$

e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \ge -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y \ge 3 \\ 5x + y \le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \ge -3 \\ 5x + y \le 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

22. ¿Cuáles son los números cuyo triple es mayor o igual que su doble mas 30?

23. Averigua cual es el menor número entero múltiplo de 3 que verifica la inecuación:

$$x + 2 < -3x + 10.$$

24. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?

25. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

26. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

27. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.

28. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

29. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

30. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.

AUTOEVALUACIÓN

1. La desigualdad $2 < x < 7$ se verifica para los valores:

a) 2, 3 y 6 b) 3, 4'7 y 6 c) 3, 5'2 y 7 d) 4, 5 y 8

2. Tiene como solución $x = 2$ la inecuación siguiente:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

3. La solución de la inecuación $3,4 + 5,2x - 8,1x < 9,4 + 7,3x$ es:

a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10,2$ c) $x > -10/1,7$ d) $x < +6/10,2$

4. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4cm

d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. La solución de la inecuación $|-x + 7| \leq 8$ es:

a) $[-1, 1]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x - 9}$ son:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$

9. La solución de la inecuación $\frac{2x - 3}{x - 2} < 1$ es:

a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$

10. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$
d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF